Venez communiquer avec nous autour de la recherche d'un problème ouvert

Michel Lacage et David Théret IREM de Montpellier

Cette « Plage Confluence » a regroupé trois animateurs, un observateur et une quinzaine de personnes ; son objectif était de proposer aux participants une véritable activité de recherche en mathématiques sur un problème ouvert. Avant de décrire le déroulement de l'atelier (partie 2), nous allons développer dans la partie 1 les hypothèses d'enseignement qui sous-tendent cette activité.

1. Partie théorique.

L'objectif de cette partie théorique est de définir, en répondant à la question « comment chercher en mathématiques ? », les activités mathématiques qui nous semblent importantes et que nous souhaitons privilégier. Après avoir provisoirement et partiellement répondu à cette question, nous présentons les caractéristiques des problèmes que nous proposons pour travailler ce type d'activités.

11.Qu'est-ce que « chercher en mathématiques », et comment aider quelqu'un à le faire ?

En répondant à cette question, nous voulons dégager des méthodes de travail, mais aussi des idées plus fondamentales sur ce qu'est l'activité mathématique. Il ne s'agit évidemment pas de donner des recettes ou des méthodes infaillibles, mais plutôt de trouver des idées qui puissent nous aider à structurer notre travail lors de la résolution d'un problème.

Inspirés (fortement !) par la lecture du livre « Comment poser et résoudre un problème »[1] de Georg Polya[2], nous avons essayé d'en retenir quelques idées particulièrement intéressantes et toujours d'actualité, auxquelles nous avons ajouté des commentaires qui semblent pertinents pour l'activité que nous proposons dans cet atelier.

Dans ce qui suit, les phrases en *italique* sont des citations libres (adaptées à notre contexte) du texte de Polya.

[1] Editions J. Gabay (1989) pour le texte français. « How to solve it » (Princeton University Press, 1953) pour l'édition originale.
[2] Georg Polya...

Dans son livre, Polya distingue 4 phases dans le travail de résolution d'un problème :

1. Compréhension du problème.
2. Conception d'un plan.
3. Exécution du plan.
4. Regard rétrospectif sur le problème et sa solution.

Cette distinction en phases permet déjà de structurer un peu mieux son travail. Mais attention ! On pourrait facilement penser qu'il faut d'abord comprendre le problème (étape 1), puis une fois que le problème est compris on passe à l'élaboration d'un plan (étape 2) et on ne revient plus jamais à l'étape 1, puis une fois que le plan est élaboré on passe à son exécution (étape 3) sans jamais plus revenir à l'étape 2, etc...

En réalité, il ne s'agit pas de phases qui s'enchaînent nécessairement et successivement dans cet ordre. Certes, on peut manifestement dire que comprendre le problème est nécessaire avant de concevoir un plan : comment imaginer une résolution du problème, si l'on n'a pas compris la signification des termes mêmes de l'énoncé ? Cependant, il se peut --- et il arrive souvent ! --- que l'étape 2 nous invite à revenir à l'étape 1 : en cherchant des connexions entre les termes de l'énoncé (les données, les conditions, l'inconnue), on s'aperçoit que certaines expressions, dont le sens était « clair » jusqu'alors, ont besoin d'être précisées (« mais finalement, qu'est-ce que *cela* ? »). De même entre les étapes 2 et 3, 1 et 3, etc... *Notre regard est différent lorsque nous avons progressé dans le problème. Il est encore différent lorsque nous l'avons résolu (Polya).*

11a. Comprendre le problème.

Il s'agit de comprendre, à un niveau peut-être élémentaire pour le moment, le problème tel qu'il se pose à nous.

Comme le remarque Polya, c'est aussi dans cette première phase de travail que se manifeste (ou non) l'intérêt et le désir de résoudre ce problème particulier. D'où son importance : **trop souvent, nous nous lançons dans la résolution alors que nous n'avons pas pris le temps de bien considérer le problème en question. Ai-je bien compris le problème ? M'intéresse-t-il ? Ai-je envie de le résoudre ?**

On peut commencer par se demander si la compréhension verbale du problème est acquise : compréhension des différents termes de l'énoncé, de la structure logique donnée(s)/condition(s)/inconnue(s). Ai-je bien compris qui sont les données, qui sont les inconnues à déterminer, quelles sont les conditions qui doivent les lier ?

Pour s'aider dans ce premier travail, on peut commencer par chercher des exemples. Ai-je des exemples de telles données ? de telles conditions ? de telles inconnues ? (pas nécessairement reliées entre elles comme dans ce problème-ci). Répondre à ces questions nous permet de prendre un premier contact, au niveau le plus élémentaire peut-être, avec les différents objets et concepts mathématiques qui se trouvent dans notre problème.

Il est important de noter qu'il y a fréquemment, dans cette première phase de travail, des prises de décisions et des interprétations plus ou moins conscientes sur les termes de l'énoncé. Lorsque ces décisions sont inconscientes et/ou non communiquées, non verbalisées, il en résulte des incompréhensions, des quiproquos, etc... Nous avons tous eu l'expérience de partir sur une piste totalement fausse, hors sujet, parce que nous avions donné une interprétation erronée du problème. Une manière pour l'enseignant (ou pour celui qui pose le problème) de résoudre cette difficulté est de verrouiller la signification des termes, de lever toute ambiguïté, de « bien poser » le problème. Cela peut se passer à différents niveaux : dans la définition des objets, de la condition à réaliser, voire de la nature de la solution elle-même. Dans un problème « bien posé », chaque mot a une signification bien précise, le problème a un sens univoque, et il en existe une unique solution (et lorsque plusieurs solutions sont possibles, elles se trouvent dans un champ bien délimité). L'intérêt est évident : on se concentre sur un problème bien précis, on y met toutes ses forces, on n'est pas perturbé par des considérations de définitions ou d'interprétation « parasites ». Remarquons cependant que la notion de « problème bien posé » est relative ; elle dépend du niveau, de la culture, de la pratique de celui ou celle qui cherche. Un même problème peut être « bien posé » pour l'un, et « mal posé » pour l'autre.

Toutefois, une phase (parfois chaotique) d'interprétation, de modélisation du problème, peut être très fructueuse, instructive, et même nécessaire dans certains cas. Voici quelques idées pour la justifier :

- l'inconvénient du verrouillage décrit ci-dessus peut être que les notions sont tellement spécifiées/particularisées pour que le problème soit bien posé, qu'elles ne sont plus naturelles du tout (de même pour le problème lui-même) ; la formulation « bien posée » du problème est alors très éloignée de la question initiale peut-être vague et un peu naïve, mais qui avait pour nous un sens intuitif que n'a plus la version « formalisée ».
- interpréter est un travail enrichissant : en prenant des décisions/des positions, je crée mon propre problème, je me l'approprie ; je vois de plus qu'il est possible d'en faire des *variantes* (voir plus loin).
- je ne suis pas dans le tout-ou-rien de « je dois répondre à *cette* question bien précise, et à aucune autre », « toute autre question est parasite, accessoire, superflue »
- enfin, dans la vie les problèmes se posent rarement de cette façon !!!

Cette étape d'interprétation, de modélisation peut me faire comprendre ceci : **il faut que j'accepte d'envisager d'autres problèmes que celui qu'on m'a initialement posé**. Il s'agit d'une observation simple, mais cruciale, qui sera au coeur de la phase suivante.

11b. Concevoir un plan.

C'est une des parties les plus difficiles, elle demande beaucoup d'imagination ; il s'agit de chercher une ou plusieurs idées qui nous donnent, de manière peut-être un peu générale et imprécise, une direction globale, un schéma de raisonnement, une suite d'étapes (calculs, constructions, vérifications...) qui nous amènent à la résolution de notre problème.

Il est évidemment très difficile d'avoir des idées si l'on n'a aucune connaissance préalable du sujet/du problème, ou si l'on n'a aucune connaissance d'aucune sorte (Polya)! Une technique évidente (fréquemment utilisée de manière inconsciente) est de faire appel à ses connaissances antérieures ; ou bien, si ces connaissances sont inexistantes ou insuffisantes, de s'en construire de nouvelles à l'aide de problèmes plus simples que celui qui nous est posé, mais qui lui sont reliés.

En commençant par résoudre un problème plus simple, je me construis des connaissances qui me permettront peut-être de résoudre le problème plus difficile, ou du moins de mieux l'appréhender. Peut-être que le problème en question n'est-il qu'une variation d'un problème déjà rencontré ? Ou peut-être ne présente-t-il que des analogies avec tel autre problème ? Peut-être que c'est à la technique de résolution de tel autre problème qu'il fait penser ? Toutes ces questions, et d'autres encore, peuvent m'inciter à penser à des situations plus familières qui vont m'éclairer.

Connaissez-vous un problème relié au vôtre ? Regardez l'inconnue ! Et essayez de penser à un problème familier ayant la même inconnue ou une inconnue similaire (Polya). Des questions identiques se posent concernant les données, les conditions, etc...

Parfois il faut essayer de varier le problème, de le transformer, d'en considérer des variantes. Il faut essayer de généraliser, ou au contraire de considérer des cas particuliers, de résoudre seulement une partie du problème (par exemple en oubliant une partie de la condition reliant les données à l'inconnue). Pour plus d'idées, nous renvoyons à la lecture du livre de Polya.

En se posant ces questions, on arrive (dans les bons cas !) à une idée plus ou moins précise de résolution du problème initial: un plan de résolution.

11c. Mettre le plan à exécution.

La conception du plan nous a donné un schéma de démonstration, une ligne directrice. Dans le meilleur des cas, il s'agit d'en vérifier les détails les uns après les autres...

La conception et l'exécution du plan sont deux moments assez distincts : disons que la conception demande de l'imagination alors que l'exécution demande de la précision et de la rigueur. En disant cela on simplifie évidemment beaucoup : la précision et la rigueur sont profitables à l'imagination. Si je lance des idées sans les étudier sur l'instant avec au moins un peu de précision et de rigueur, je risque de ne pas aller très loin. De même, si je ne fais qu'appliquer minutieusement rigueur et précision lors de l'exécution du plan, je risque de passer à côté de quelque chose d'important, ou de rester impuissant devant un obstacle imprévu.

Cela dit, **dans l'idéal il faudrait que chaque étape du plan soit si bien étudiée, résolue, qu'elle en devienne absolument claire et indubitable, lumineuse** (il s'agit évidemment d'un idéal !).

Dans quel ordre vérifier les détails du plan **?** Quelques idées s'imposent d'elles-mêmes (et si elles sont contradictoires, c'est qu'il n'y a pas de méthode universelle qui nous garantisse le succès) :

- dans l'ordre logique du plan, de la démonstration. C'est l'ordre le plus évident : on commence par le commencement, et on finit par la fin !
- du simple au compliqué. C'est une technique élémentaire : on commence par le facile (ou ce qu'on croit tel), et on garde le plus difficile pour la fin, une fois qu'il n'y a plus que cela à faire.
- commencer par le point crucial, celui où toute la difficulté semble résider. En effet, à quoi bon vérifier plein de petites choses faciles si c'est pour s'apercevoir qu'elles nous sont inutiles parce que l'étape cruciale ne fonctionne pas comme nous le croyions !

11d. Jeter un regard rétrospectif sur ce qu'on a fait.

Il s'agit d'une phase importante du travail, souvent négligée (peut-être parce qu'on est tout heureux d'avoir trouvé la solution et d'avoir enfin « terminé » le problème).

Dans cette étape, on porte un regard d'ensemble sur le problème, sur la solution, sur le chemin qui nous y a amené, en pensant que cela peut consolider notre connaissance et notre compréhension.

D'une certaine manière, un problème n'est jamais terminé, il n'a pas de fin. Cela ne veut pas dire que l'on ne doive jamais s'arrêter ; après tout, peut-être nous sommes-nous posé ce problème pour des raisons pratiques, et une fois arrivés à la solution nous pouvons appliquer le résultat de notre recherche et passer à autre chose ! **Pourtant on peut dire qu'on n'a jamais fait complètement le tour d'un problème, qu'il nous reste toujours quelque chose à comprendre, à apprendre.**

Si la solution que nous proposons nous paraît compliquée ou obscure, si nous avons le sentiment que nous avons fait intervenir un « truc » qui résout miraculeusement le problème, c'est que sans doute il nous reste quelque chose à comprendre (et ce quelque chose peut être très profond !).

Sommes-nous capable de présenter la solution à quelqu'un d'autre de manière intelligible ? Et pas seulement de sorte à ce qu'il ou elle puisse suivre pas à pas nos explications, mais pour que nous puissions le ou la convaincre, lui montrer comment il ou elle aurait pu trouver cette solution. Pouvons-nous répondre à la question : « au fond, qu'est-ce qui fait que ça marche ? ».

Rappelons-nous que notre conception du problème a probablement changé, même l'énonce a peut-être une nouvelle manière de s'adresser à nous. Pouvons-nous maintenant obtenir le résultat différemment ? Pouvons-nous voir la solution d'un coup d'oeil? Pouvons-nous appliquer la même idée pour résoudre un autre problème ? Etc...

11e. Conclusion.

En exposant les idées précédentes, nous n'avons pas seulement présenté des techniques de travail : nous avons aussi répondu en partie à la question « qu'est-ce que faire des mathématiques ? » (et finalement nous avons aussi implicitement abordé la question « qu'est-ce que les mathématiques ? »).

Nous souhaitons par conséquent proposer des problèmes qui permettent de pratiquer ce type d'activité mathématique ; nous détaillons maintenant les caractéristiques de ces problèmes.

12.Les caractéristiques des problèmes proposés.

Ces problèmes sont de véritables problèmes ouverts de recherche, et non des problèmes fermés déguisés où la réponse est unique et imposée. D'un contenu intuitif mais assez flous, suffisamment simples, dans des domaines abordables par tous, ils suscitent la curiosité. Les énoncés de ces problèmes sont courts, attractifs et compréhensibles par tous. Cependant leur complexité nécessite des échanges, une recherche en groupe et un travail collaboratif pour arriver à des résultats satisfaisants.

La durée de la recherche est nécessairement assez longue, étalée sur plusieurs semaines avec des moments de synthèse et de relance gérés par les tuteurs ou les enseignants.

Le démarrage est aisé mais les énoncés nécessitent un débat entre les chercheurs pour fixer des choix. Il peut être nécessaire de :

- définir les objets sur lesquels on travaille,
- réaliser des premières modélisations suivant les choix adoptés,
- s'interroger sur les résultats attendus : « Qu'est ce qu'une solution, une réponse satisfaisante ? ».

Une fois ces choix adoptés par tous, ces problèmes offrent un démarrage aisé, il n'y a pas de blocage, une phase expérimentale (géométrique, numérique) est accessible à tous, les premières recherches sont riches de résultats variés.

L'évolution des recherches peut être très imprévisible, car ces problèmes sont évolutifs, "vivants", ils nécessitent des échanges entre pairs. Cette communication des divers résultats permet d'avancer, de relancer, de remotiver les recherches. Il peut y avoir une remise en cause des choix initiaux, une redéfinition des objets et des « bonnes réponses ». De nouvelles modélisations peuvent être proposées, et le problème explorera de nouvelles pistes en entraînant l'étude de problèmes annexes ou de variantes.

De fait, la recherche n'est jamais terminée ; le problème peut rester ouvert, c'est à dire : n'être jamais résolu ou bien avoir d'autres prolongements.

2. Déroulement de l'atelier.

21. Plan de l'atelier

Quatre phases de 45 minutes environ ont été initialement prévues.

- phase 1 : recherche du « problème des gardiens de musée » en petits groupes

  Enoncé du problème : *On s'intéresse à la surveillance d'une salle de musée, dont les murs sont rectilignes : on y place des gardiens qui sont assis sur des chaises. Ces chaises sont fixées au sol (les gardiens ne peuvent donc pas se déplacer dans la salle), mais elles sont pivotantes (les gardiens peuvent donc voir dans toutes les directions à partir de leur position).*

  Quel est le nombre minimum de gardiens dont il faut disposer pour surveiller toute la salle, et où faut-il les placer ?
- phase 2 : communication de cette recherche
- phase 3 : quelques pistes vers la résolution de ce problème
- phase 4 : synthèse de l'atelier, et présentation de quelques expériences vécues avec des élèves.

22. Analyse a posteriori de la phase 1 (1h15)

22a Organisation de la recherche :

Les participants ont été séparés en 2 groupes. Durant une dizaine de minutes, chacun a tenté de s'approprier l'énoncé. Durant l'heure suivante, des échanges se sont instaurés au sein de chaque groupe. Les 3 animateurs se sont intégrés aux groupes et ont participé à la recherche. A deux reprises, deux animateurs ont changé de groupe de manière à véhiculer les informations et à relancer la recherche (technique du « bus »).

22b Synthèse de la recherche collective :

- 1er groupe :

  Trois sous-groupes se sont spontanément formés, associant des phases de recherche indépendante et des moments de synthèse.

  Pistes évoquées :
  - ✓ découpage des salles en polygones convexes
  - ✓ importance des angles rentrants
  - ✓ travail sur les demi-plans ayant pour frontières les droites prolongeant les côtés d'une salle : intersection de droites frontières.
  - ✓ Présence d'un "trou" dans une salle (ex : un pilier, ou tout autre objet gênant la visibilité)
  - ✓ Polygones étoilés.

- 2ème groupe :

  Les participants ont travaillé de manière plus individuelle, une personne ayant un peu monopolisé les axes de la recherche. De manière individuelle, on a retrouvé les pistes précédemment évoquées, avec la volonté d'exhiber un minorant et un majorant dépendant de certains paramètres de la salle.

23. Analyse a posteriori de la phase 2 (30 min)

Cette phase a permis d'illustrer de façon poignante les difficultés de la communication autour de la recherche d'un problème ouvert : permettre l'évocation de toutes les pistes et instaurer un moment de débat scientifique. Nous reparlerons plus loin de ce point dans le paragraphe « Synthèse de l'atelier ».

24. Analyse a posteriori de la phase 3 (30 min)

Quelques pistes et variantes du problème des gardiens de musée ont été étudiées et un des animateurs a présenté une solution (présentée en annexe).

Le résultat proposé est le suivant : *si on considère une salle polygonale à n côtés, alors E(n/3) gardiens suffisent.* Ici E(n/3) désigne la partie entière de n/3 : c'est le plus grand nombre entier inférieur à n/3.

25. Analyse a posteriori de la phase 4 (45 min)

25a Discussion et synthèse de l'atelier.

Cet atelier a fait apparaître d'une part l'intérêt de travailler dans un cadre différent sur des problèmes différents, et d'autre part la difficulté de l'organisation de ce travail.

Les participants soulignent qu'un problème comme celui des gardiens de musée est original et stimulant dans sa formulation et dans sa conception. Après coup, ils apprécient l'idée qu'un tel problème est trop difficile pour être résolu seul, et qu'il peut être profitable de travailler en commun ; l'originalité de cette démarche les intéresse visiblement. Enfin, il leur plait d'étudier un problème qui n'admet pas de solution ou qui n'admet qu'une solution partielle, qui débouche sur d'autres problèmes dont certains restent ouverts. Certains participants étaient au début tout à fait persuadés qu'ils allaient trouver une solution à ce problème, et à la fin ravis d'apprendre qu'il n'en avait pas. On peut penser qu'un des buts pédagogiques de l'atelier était alors atteint : montrer que l'activité mathématique ne consiste pas (seulement) en une résolution de problèmes bien circonscrits qui tous admettent une solution.

Cela dit, les difficultés de l'exercice se sont fait sentir de manière évidente, tant pour les participants que pour les animateurs. Dans la phase finale de l'atelier, Claude Tisseron (observateur) nous a aidé à prendre conscience des problèmes de communication et d'organisation du travail ; les idées qui suivent sont une synthèse de ses critiques, de la discussion qui se tint avec les participants et les animateurs, et des réflexions que le déroulement de cet atelier nous a inspirées.

Tout d'abord, il n'est pas facile de donner à tous l'envie de travailler à plusieurs, en commun. Cette activité n'est pas naturelle pour certains, qui préfèrent penser qu'ils y arriveront seuls. Dans un petit groupe, se manifestent très rapidement des comportements divers ; en simplifiant, on peut observer les attitudes suivantes. Certains s'isolent pour travailler seuls comme on vient de le dire, et parfois arrivent à se sortir de leur recherche pour aller vers les autres, mais parfois ne le peuvent pas (il faut absolument qu'ils trouvent). Certains restent un peu isolés, dans une certaine expectative ; ils ont des idées, mais ne désirent pas se mettre en avant en prenant l'initiative d'en parler. Certains ont aussi peur de reconnaître qu'ils n'ont pas beaucoup d'idées. D'autres enfin, plus désinhibés ou plus habitués à ce genre d'exercice, arrivent à faire part de leurs idées, de leurs doutes, ou de leur ignorance. C'est évidemment l'attitude que l'on souhaiterait développer chez tous, si elle était toujours couplée à une bonne capacité d'écoute ! Car dans un groupe apparaît fréquemment une ou plusieurs personnes qui s'accaparent tout l'espace de communication : ils sont alors semblables à ceux qui s'isolent pour chercher seuls, en ce sens qu'ils ne paraissent autoriser que leur propre pensée dans la réflexion commune. Il est évidemment très difficile de trouver un équilibre entre sa propre recherche et l'écoute des recherches des autres ; comment prendre sur soi pour abandonner sa réflexion ? Ici, sans doute les animateurs peuvent-ils avoir un rôle à jouer, mais le dosage de l'individuel et du collectif n'est pas facile à gérer. Il faut à la fois laisser le groupe se prendre en main sans être directif, et aussi intervenir au bon moment. Lors de l'atelier, il a été évoqué l'intérêt de réaliser une affiche pour laisser une trace et une synthèse de la recherche du groupe, dans laquelle tout le monde se retrouve, avant de communiquer entre les différents petits groupes.

L'interaction entre petits groupes se fait de manière tout aussi difficile qu'au sein de chaque petit groupe : il est difficile d'abandonner les thématiques privilégiées, et d'entrer dans un autre monde en écoutant le travail des autres. Avec plus ou moins de bonheur, les animateurs ont essayé de mettre en pratique la technique du « bus » proposée par Nik Lygeros. Une personne (animateur ou participant) passe d'un groupe à l'autre pour informer chacun, de l'avancement du travail des autres. Le but est de stimuler, d'accélérer la réflexion. Dans le cas présent, un animateur était présent dans chaque groupe au début de la séance, et ces deux animateurs ont échangé leur place à mi-parcours. Cette technique, d'après N. Lygeros, donne à la recherche un aspect compétitif ; dans les bons cas, les groupes attendent le bus pour savoir ce que les autres ont fait, sans que cela nuise pour autant à leur propre réflexion. Lors de cet atelier, la difficulté est apparue de trouver le bon moment où le bus peut intervenir : ni trop tôt, ni trop tard ; il n'a pas toujours su capter l'attention des membres du groupe, qui avaient du mal à écouter le travail des autres. On retrouve ainsi les mêmes problèmes que dans le travail à l'intérieur d'un petit groupe, ce qui n'a rien d'étonnant.

Concernant ce type de travail, un des participants s'est demandé s'il ne pouvait pas arriver qu'un élève s'effondre lorsqu'il s'aperçoit que sa conjecture est invalidée, alors qu'il y croyait depuis un long moment. La réponse d'autres participants fut de souligner le côté motivant de cette situation (émulation, processus de conjectures et réfutations) ; ce n'est pas parce que la conjecture s'écroule que tout s'écroule, et dans cette même conjecture se trouvent certainement des éléments constructifs dont on peut tirer profit.

25b Présentation de diverses expériences.

Nik Lygéros a présenté les travaux effectués avec ses groupes d'étudiants de Lyon (enfants précoces, étudiants de classe préparatoire et d'université). Il s'appuie sur le postulat suivant : « on n'apprend pas à être intelligent, mais on apprend à penser. » Il s'agit d'un travail en petits modules (une quinzaine de personnes maximum). Lors de chaque session, chacun se présente et détermine son profil (qualités et défauts). Le but est de tirer parti de la diversité pour former un groupe homogène dans lequel les gens se complètent bien. A la fin, chacun juge sa propre participation à la résolution, ainsi que celle des autres. Les problèmes posés dépassent le niveau de compétence de chacun, d'où la nécessité de collaborer. Ce sont des problèmes ouverts d'énoncé simple, à spectre de résolution large, mais admettant une solution bien déterminée.

Michel Lacage et David Théret ont présenté les objectifs des activités réalisées par le thème « Résolution collaborative de problèmes via internet » dans le cadre du SFODEM (Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques) dans l'Académie de Montpellier. Cette formation poursuit deux objectifs fondamentaux qui sont d'une part de permettre l'évolution des pratiques des enseignants autour de la résolution de problèmes ouverts et d'autre part de mettre en réseau plusieurs classes de l'Académie afin d'instaurer un travail collaboratif à distance.

Le travail autour des pratiques enseignantes est conduit selon trois axes :

- Quelles sont les pratiques pédagogiques qui favorisent un enseignement sur le mode constructiviste dans les classes ? Les enseignants seront donc invités à mener une réflexion sur la pratique des problèmes ouverts[3], l'écriture des narrations de recherche [4] et l'instauration de moments de débat scientifique[5].
- Quelle est la spécificité de l'apprentissage co-actif ? L'expérimentation de différentes organisations de travaux de groupes permettra la prise de conscience de l'importance du travail entre pairs, le fait que l'intéraction génère d'autres activités qui déclenchent ou stimulent des mécanismes cognitifs.
- Comment mettre en place une communauté de construction de savoirs avec engagement mutuel de chaque participant ? Afin de favoriser un véritable travail collaboratif, les buts partagés, partiellement établis initialement, seront négociés et adaptés à la progression du travail.

La mise en réseau de plusieurs classes de l'Académie autour de la résolution d'un problème ouvert, engendre un brassage des élèves quant à leur provenance, âge et niveau, qui doit donc permettre :

- de motiver le travail de recherche sur la durée ;
- de montrer la complémentarité et l'enrichissement de la mise en commun de toutes les compétences ;
- de valoriser certains élèves grâce à leurs idées originales
- d'améliorer la qualité du travail destiné à être communiqué aux autres.

La mise en situation de travail collaboratif doit permettre un changement de pratiques et une évolution du rôle de l'enseignant dans sa classe.

Ce travail doit impulser un travail d'équipe dans les établissements concernés.

---

[3] IREM de Lyon Problèmes ouverts et situation problèmes.

[4] SAUTER M. Narrations de recherche : une nouvelle pratique pédagogique Revue Repères des IREM n° 30

[5] LEGRAND M. Débat scientifique en cours de mathématiques Revue Repères IREM n° 10

Les élèves donneront plus de sens à l'apprentissage de nouveaux concepts introduits ou utilisés par leurs pairs.

Le travail collaboratif est organisé autour de la résolution de problèmes ouverts à travers trois dispositifs d'échanges :

- Entre tuteurs afin de mieux anticiper les réactions des stagiaires, de prévoir les difficultés et de mettre en place les conditions propices à une bonne communication à distance.
- Entre stagiaires afin de mutualiser les différentes pratiques pédagogiques, d'analyser les productions-élèves et d'élaborer des synthèses et des ressources utiles à d'autres enseignants.
- Entre élèves afin de mieux comprendre la richesse d'un travail collaboratif pour mener une recherche en mathématique.

3. Annexe : une solution au problème des gardiens de musée.

Ce problème fut inventé par V. Klee en 1973 ; le résultat que nous allons examiner est dû à V. Chvatal (1975), mais la preuve présentée ici est celle de S. Fisk (1978).

Le résultat de Chvatal est le suivant :

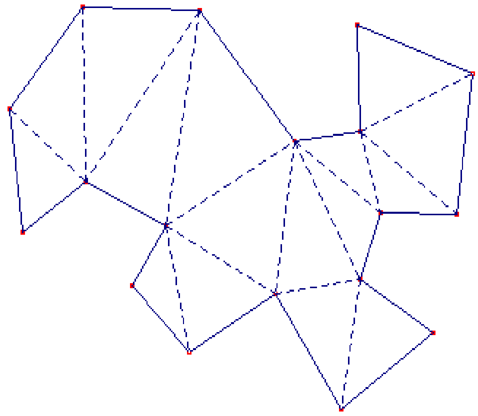
On considère une salle polygonale à n côtés. Alors E(n/3) gardiens suffisent.

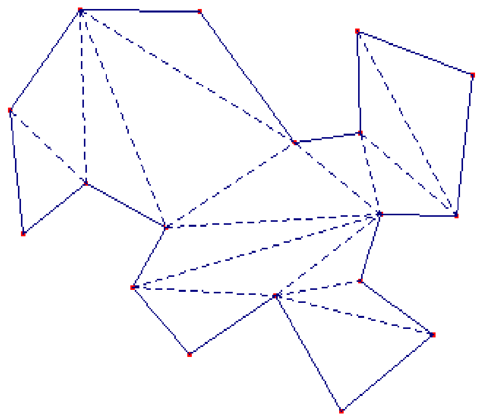
Ici E(n/3) désigne la partie entière de n/3 : c'est le plus grand nombre entier inférieur à n/3.

Commentaires. On s'est borné ici à considérer une salle plane, polygonale, sans trous ni obstacles. On l'a modélisée par un polygone ayant un nombre fini de côtés. D'autres types de salles, plus compliqués, sont envisageables.

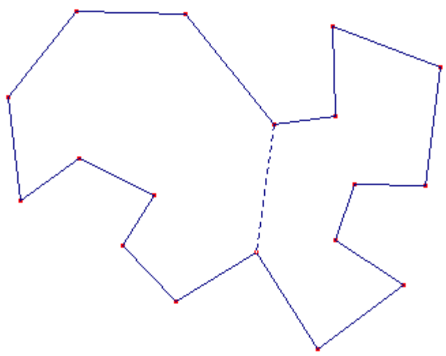
Démonstration. L'idée est de découper la salle en triangles (le plus simple des polygones convexes), et de placer les gardiens à certains sommets de ces triangles de sorte qu'il y ait un gardien au moins par triangle.

Triangulation de la salle. Il s'agit de découper la salle en triangles. Pour obtenir un petit nombre de triangles, on essaie de ne pas introduire de sommets supplémentaires : les sommets des triangles seront les sommets du polygone. Pour une même salle, plusieurs triangulations de ce type sont possibles. Par exemple :





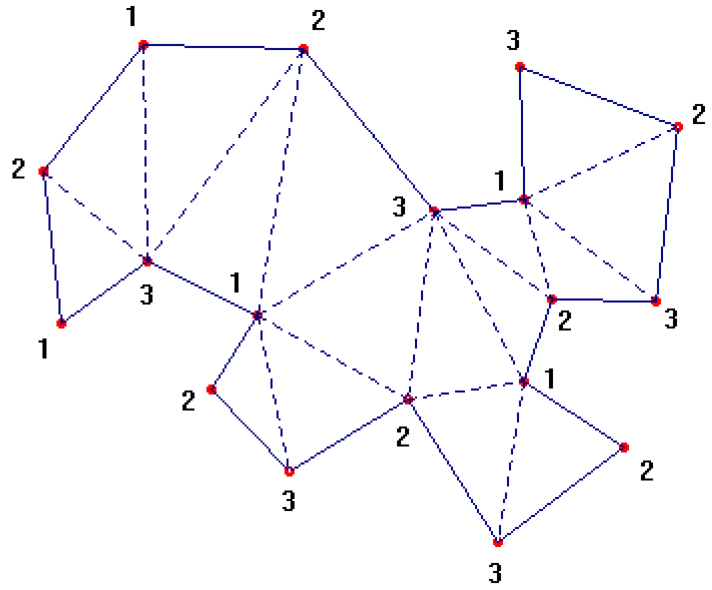
Sur un plan de salle particulier, on se convainc facilement qu'une telle triangulation est possible. Mais comment le démontrer ? Il y a sans doute plusieurs manières de le faire. Voici une idée qui marche : procéder par récurrence sur le nombre de côtés de la salle polygonale. Pour la mettre en oeuvre, il suffit de montrer que tout polygone admet une *diagonale*, c'est à dire un segment dont les extrémités sont des sommets du polygone, et qui sépare le polygone en deux parties :



Voyez-vous comment démontrer qu'il existe toujours une telle diagonale ?

Une fois qu'une diagonale a été trouvée, on peut imaginer que l'on obtient deux salles polygonales collées l'une à l'autre le long de cette diagonale. Dans la suite, ces salles plus petites seront appelées les *sous-salles.* Par récurrence, on peut trianguler chacune des deux sous-salles (qui ont moins de côtés que la salle initiale). La juxtaposition des deux triangulations donne une triangulation de la salle initiale.

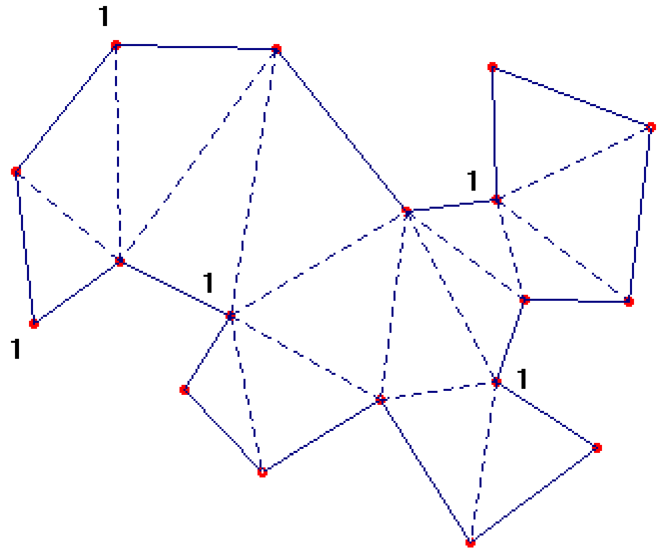
Coloriage du graphe obtenu. Après triangulation du polygone, on a obtenu un graphe dont les sommets sont les sommets du polygone, et dont les arêtes sont les côtés des triangles de la triangulation. On va maintenant *colorier* ce graphe, c'est à dire attribuer une « couleur » à chaque sommet du graphe, de sorte que deux sommets joints par une arête soient toujours de couleurs distinctes. Sur le plan suivant, les couleurs ont été remplacées par des numéros…



Le résultat général est que *trois couleurs suffisent* ! Par exemple sur le plan ci-dessus, seuls trois numéros ont été utilisés. Pour montrer ce résultat, on peut raisonner par récurrence comme dans l'étape de triangulation. Si on sait colorier avec trois couleurs chacune des deux sous-salles triangulées séparées par une diagonale, on a envie de juxtaposer les deux coloriages pour obtenir un coloriage de la salle initiale triangulée. En juxtaposant, on peut rencontrer le problème suivant : les deux sommets de la diagonale ne sont pas de la même couleur dans l'une et dans l'autre sous-salles. Pour surmonter ce problème, il suffit de permuter les couleurs sur l'une des deux sous-salles, de sorte que les couleurs coïncident aux extrémités de la diagonale.

Etape finale *: disposition des gardiens.* Le polygone initial possède n côtés, donc aussi n sommets. On a utilisé trois couleurs pour colorier ces sommets. Il est nécessaire que l'une au moins de ces couleurs soit représentée moins de n/3 fois ! Plaçons un gardien à chaque sommet de cette couleur : il y a au plus E(n/3) gardiens ; et puisque chaque triangle de la triangulation a nécessairement un sommet de chaque couleur, il y a au moins un gardien pour chaque triangle.

Sur le coloriage précédent, la couleur 1 est représentée 5 fois ; la couleur 2, l'est 7 fois ; et la couleur 3, 6 fois. La couleur 1 est donc la moins représentée (on vérifie au passage que 5 est bien inférieur ou égal à la partie entière de n=18). Si on place un gardien à chaque sommet de couleur 1, on obtient une surveillance de toute la salle, comme promis.



Notons que cette méthode donne des résultats différents suivant la triangulation choisie, et qu'elle n'est pas optimale en général : pouvez-vous faire l'économie de certains gardiens dans l'exemple ci-dessus ?